Joanna Obrębska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
joanna.obrebska@uwm.edu.pl

Algebry zmian dychotomicznych w strukturach liniowych i dyskretnych a algebry temporalne

Zainteresowanie czasem było głównym tematem refleksji już u Arystotelesa. Czas był głównym przedmiotem badań w naukach takich jak fizyka czy psychologia. Wiele z tych koncepcji naukowych stało się również interesujące dla filozofii. Wśród teorii filozoficznych pojawiają się i takie w których używa się narzędzi logiki formalnej [1]. Ciekawym kierunkiem poszukiwań wydaje się konstruowanie systemów logiki zmiany.

Logiki zmian dychotomicznych LZD należą do logik nieklasycznych opisujących problem zmiany. LZD należą do grupy rachunków będących rozszerzeniem klasycznego rachunku zdań, a zatem język tych rachunków oprócz funktorów prawdziwościowych (negacji, koniunkcji, alternatywy, implikacji, i równoważności) zawiera dodatkowo inne funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych, które nie są definiowalne przy pomocy funktorów prawdziwościowych.

Po raz pierwszy LZD skonstruował Józef Wajszczyk w pracy *Logika a czas i zmiana* w 1995 roku. Nazwę „logiki zmian dychotomicznych" autor tłumaczył, tym że „(…)jedynymi sposobami zmian , jakie dokonują się w w-algebrach temporalnych, są przejścia skokowe od zachodzenia pewnego stanu rzeczy do niezachodzenia lub odwrotnie. Zmian ciągłych, w których przejście od pewnego stanu do stanu innego jest rozłożone w czasie i przebiega w sposób stopniowy i ciągły , konceptualizacja ta nie obejmuje" [2].

Autor zaprezentował w swojej pracy rachunki LZD w strukturach czasowych ciągłych i liniowych. Język tych logik zawierał oprócz funktorów prawdziwościowych także specyficzne zwroty opisujące zmianę: $\lhd\alpha$– poprzednio α, $\rhd\alpha$ - następnie α. Autor założył, że w strukturach ciągłych dla każdego momentu *t* istnieje takie prawostronne i lewostronne sąsiedztwo w którym stan rzeczy się nie zmienia [3].

Rachunki mojej własnej konstrukcji są to logiki **LZD** w strukturach **czasu liniowego i dyskretnego**, gdzie poza funktorami klasycznymi będą występowały także dwa funktory zmiany:

$\lhd\alpha$ – w poprzednim momencie było tak, że α ,

$\rhd\alpha$- w następnym momencie będzie tak, że α .

Algebry zmian dychotomicznych w strukturach czasowych liniowych i dyskretnych

Niech *T* będzie niepustym zbiorem momentów czasowych *t* , a $<$ dowolną relacją binarną.„wcześniej – później" określoną na zbiorze *T*. Parę (*T*, $<$) nazwiemy „czasem" , bądź „ramą odniesień czasowych".

---

[1] G.H. von Wright, *And Next,* Acta Philosophica Fennica 1965, fasc.18, s.293.

[2] J.Wajszczyk, *Logika a czas i zmiana,* Wydawnictwo WSP, Olsztyn 1995, s.76.

[3] Tamże, s.73.

Mówiąc o strukturach dyskretnych możemy przyjąć iż zbiór momentów będzie zachowywał się jak zbiór liczb całkowitych, naturalnych, całkowitych ujemnych bądź też jak zbiór skończony n-elementowy.
I tak możemy wyróżnić cztery struktury czasu:

1. $(C, <)$ – struktura nieskończona bez momentu początkowego i bez momentu końcowego,
2. $(N, <)$ – struktura nieskończona z momentem początkowym, ale bez momentu końcowego,
3. $(C^-, <)$ – struktura nieskończona bez momentu początkowego, ale z momentem końcowym
4. $(\{1,2,3,\ldots, n\}, <)$– struktura skończona, n-elementowa.

W zależności od liczby momentów czasowych w takich strukturach mamy do czynienia z inną logiką W ten sposób możemy mówić o logikach zmian dychotomicznych LZD_C, LZD_N, LZD_{C^-}, LZD_n.

We wszystkich tych strukturach relacji $<$ przysługują pewne układy własności. Dla struktury $(C, <)$ relację $<$ opisuje układ warunków:

W1. $\bigwedge_{x,y} \left[x < y \Rightarrow \sim(y < x) \right]$ asymetryczność

W2. $\bigwedge_{x,y,z} \left[x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z \right]$ przechodność

W3. $\bigwedge_{x,y} \left[x \neq y \Rightarrow x < y \vee y < x \right]$ spójność lokalna

W4. $\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \left[x < y \wedge \bigwedge_{z} \left(z = x \vee z = y \vee z < x \vee y < z \right) \right]$ dyskretność

W5. $\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \left(x < y \right)$ brak końca

W6. $\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \left(y < x \right)$ brak początku

Dla struktury $(N, <)$ relację $<$ opisuje odpowiednio W1, W2, W3, W4, W5 oraz W6' gdzie:

W6'. $\bigvee_{x} \bigwedge_{y} \left(x = y \vee x < y \right)$ istnieje początek

Dla struktury $(C^-, <)$ relację $<$ opisuje W1, W2, W3, W4', W5', W6, gdzie:

W4'. $\bigwedge_{x} \bigvee_{y} \left[y < x \wedge \bigwedge_{z} \left(z = x \vee z = y \vee z < y \vee x < z \right) \right]$ dyskretność

W5'. $\bigvee_{x} \bigwedge_{y} \left(y = x \vee y < x \right)$ istnieje koniec

Dla struktury $(\{1,2,3,\ldots, n\}, <)$ relację }, $<$ opisuje odpowiednie W1, W2, W3, W4'' gdzie:

W4'' $\bigvee_{x_1} \cdots \bigvee_{x_n} \left[x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} < x_n \wedge \bigwedge_{z} \left(z = x_1 \vee \ldots \vee z = x_n \right) \right]$

dyskretność oraz to, że jest dokładnie n – elementów.

Każda z logik LZD_C , LZD_N , LZD_{C^-}, LZD_n będzie miała własną interpretację semantyczną poprzez skonstruowanie dla niej odpowiedniej algebry.
Możemy wiec wyróżnić cztery algebry:
1. algebra zmiany w czasie dyskretnym i liniowym bez momentu początkowego i bez momentu końcowego
2. algebra zmiany w czasie dyskretnym i liniowym z momentem początkowym i bez momentu końcowego
3. algebra zmiany w czasie dyskretnym i liniowym bez momentu początkowego i początkowego momentem końcowym
4. algebra zmiany w czasie dyskretnym i liniowym o skończonej liczbie momentów .

$$\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright} = (\mathrm{A}_C, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \blacktriangleleft, \blacktriangleright)$$
$$\mathcal{A}_{N\triangleleft\triangleright} = (\mathrm{A}_N, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \blacktriangleleft, \blacktriangleright)$$
$$\mathcal{A}_{C^-\triangleleft\triangleright} = (\mathrm{A}_{C^-}, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \blacktriangleleft, \blacktriangleright)$$
$$\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright} = (\mathrm{A}_n, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \blacktriangleleft, \blacktriangleright)$$

gdzie $-, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow$ są to korelaty semantyczne funktorów prawdziwościowych natomiast $\blacktriangleleft$, $\blacktriangleright$ są korelatami semantycznymi funktorów zmiany. Uniwersa tych algebr definiujemy w sposób następujący:

$\mathrm{A}_C = \{ \varphi : C \mapsto \{0,1\} \}$ np. φ =(…..0,1,1,1,0,0,……)
$\mathrm{A}_N = \{ \varphi : N \mapsto \{0,1\} \}$ np. φ =(1,0,0,1,0,1……)
$\mathrm{A}_{C^-} = \{ \varphi : C^- \mapsto \{0,1\} \}$ np. φ =(…..0,0,1,1,0,1)
$\mathrm{A}_n = = \{ \varphi : \{1,2,3,\ldots,n\} \mapsto \{0,1\} \}$ np. dla n=4 φ =(0,0,1,0)

Teraz zdefiniuję korelaty semantyczne funktorów prawdziwościowych.

Dla $\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright}$

$$[-\varphi](t) = \begin{cases} 1 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) = 0 & , t \in C \\ 0 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) = 1 & , t \in C \end{cases}$$

$$\varphi \cap \psi = \min[\varphi, \psi]$$

$$\varphi \cup \psi = \max[\varphi, \psi]$$

$$[\varphi \rightarrow \psi](t) = \begin{cases} 1 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) = 0 \quad \text{lub} \quad \psi(t) = 1 & , t \in C \\ 0 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) = 1 \quad \text{i} \quad \psi(t) = 0 & , t \in C \end{cases}$$

$$[\,\varphi \leftrightarrow \psi\,](t) = \begin{cases} 1 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) = \psi(t) & , t \in C \\ 0 \quad \text{gdy} \quad \varphi(t) \neq \psi(t) & , t \in C \end{cases}$$

Analogicznie dla algebr $\mathcal{A}_{N\triangleleft\triangleright}$, $\mathcal{A}_{C^-\triangleleft\triangleright}$, $\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$

Niech $B(t)$ – oznacza bezpośredni poprzednik momentu t
$S(t)$ – oznacza bezpośredni następnik momentu t
p – oznacza „początek”
k – oznacza „koniec”

$\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright}$

$$[\blacktriangleleft \varphi](t) = \varphi(B(t)) = \varphi(t-1) \qquad , t \in C$$
$$[\blacktriangleright \varphi](t) = \varphi(S(t)) = \varphi(t+1) \qquad , t \in C$$

$\mathcal{A}_{N\triangleleft\triangleright}$

$$[\blacktriangleleft \varphi](t) = \begin{cases} \varphi(B(t)) \quad dla\ t \neq p \\ 0 \quad dla \quad t = p \end{cases} \qquad t \in N$$

► - tak jak w $\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright}$

$\mathcal{A}_{C^-\triangleleft\triangleright}$

$$[\blacktriangleright \varphi](t) = \begin{cases} \varphi(S(t)) \quad dla\ t \neq k \\ 0 \quad dla \quad t = k \end{cases} \qquad t \in C^-$$

◄ - tak jak w $\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright}$

$\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$

◄ - tak jak w $\mathcal{A}_{N\triangleleft\triangleright}$
► - tak jak w $\mathcal{A}_{C^-\triangleleft\triangleright}$

Algebry temporalne w strukturach czasowych liniowych i dyskretnych

Rozpatrywane tu struktury czasowe liniowe i dyskretne mogą stanowić za punkt wyjścia dla konstrukcji odpowiednich algebr temporalnych. Konstrukcją logik temporalnych czasu linowego i dyskretnego zajął się J.Wajszczyk w pracy *Logiki w logice* [4].
Cztery rodzaje tych algebr temporalnych to:

$\mathcal{A}_{C\ GH}$, $\mathcal{A}_{N\ GH}$, $\mathcal{A}_{C^-\ GH}$ i $\mathcal{A}_{n\ GH}$

Różnią się one od odpowiednich algebr zmiany jedynie tym, że w miejsce ◄,► występują **G,H** - semantyczne korelaty specyficznych w logikach temporalnych jednoargumentowych funktorów zdaniowych:
G α - zawsze w przyszłości będzie tak, że α
H α - zawsze w przeszłości było tak , że α

$$\mathcal{A}_{C\ GH} = (\mathrm{A}_C, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{G,H})$$

$$\mathcal{A}_{N\ GH} = (\mathrm{A}_N, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{G,H})$$

$$\mathcal{A}_{C^-\ GH} = (\mathrm{A}_{C^-}, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{G,H})$$

$$\mathcal{A}_{n\ GH} = (\mathrm{A}_n, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow, \mathbf{G,H})$$

$\mathrm{A}_C, \mathrm{A}_N, \mathrm{A}_{C^-}, \mathrm{A}_n, -, \cap, \cup, \rightarrow, \leftrightarrow,$ są rozumiane tak jak w algebrach zmiany, a działania **G,H** są we wszystkich tych algebrach określane następująco:

$$[\mathbf{G}\varphi]\ (t) = \begin{cases} 1 \text{ gdy dla każdego t}' :\ t < t' & \varphi\,(t') = 1 \\ 0 \text{ gdy dla pewnego t}' :\ t < t' & \varphi\,(t') = 0 \end{cases}$$

$$[\mathbf{H}\varphi]\ (t) = \begin{cases} 1 \text{ gdy dla każdego t}' : t < t' & \varphi\,(t') = 1 \\ 0 \text{ gdy dla pewnego t}' : t < t' & \varphi\,(t') = 0 \end{cases}$$

Np. dla n = 5

$\varphi_1 =$ (0,0,0,1,1)

$\mathbf{G}\varphi_1 =$ (0,0,1,1,1)

$\mathbf{H}\varphi_1 =$ (1,0,0,0,0)

---

[4] J.Wajszczyk , *Logiki w logice,* Wydawnictwo UWM, Olsztyn 2001, s.26.

$\blacktriangleright\varphi_1 =$ (0,0,1,1,0)

$\blacktriangleleft\varphi_1 =$ (0,0,0,0,1)

Na tym przykładzie możemy zaobserwować różnice między funktorami temporalnymi , a funktorami zmian dychotomicznych. Szczególnie interesującą różnicą jest to jaką wartość przyjmuje funkcja φ w momencie początkowym i końcowym w zależności od tego jakim funktorem zostanie poprzedzona. Wszelkie te różnice wynikają z definicji powyższych funktorów.

Funkcyjna pełność algebr zmian dychotomicznych

J. Wajszczyk w pracy *Logiki w logice* udowodnił, że algebry temporalne czasu liniowego, dyskretnego *n* – momentowego są funkcyjnie pełne .Oznacza to, że przy pomocy operacji Boole'owskich oraz operacji **G,H** można zdefiniować każdą operację w $\mathcal{A}_{n\ GH}$ (w algebrze o skończonej liczbie argumentów). W dowodzie posłużono się kryterium Słupeckiego. Według tego kryterium każda algebra jest funkcyjnie pełna wtedy i tylko wtedy gdy:

1. Definiowalne są w niej wszystkie operacje jednoargumentowe.
2. Definiowalna jest w niej przynajmniej jedna operacja dwuargumentowa, której zbiorem wartości jest całe uniwersum algebry [5].

Pkt. 2. Np. Iloczyn – jest definiowany w $\mathcal{A}_{n\ GH}$ przy pomocy operacji Boole'owskich a zbiorem jego wartości jest całe uniwersum (wszystkie możliwości kombinacji 0, 1 na poszczególnych miejscach)
Pkt. 1. został udowodniony przez Wajszczyka w *Logiki w logice*. Autor wyprowadził definicję dowolnego operatora jednoargumentowego posługując się przy tym operacjami Boole'owskimi oraz operacjami **G,H** [6]**.**

Skoro Wajszczyk udowodnił, że w algebrze $\mathcal{A}_{n\ GH}$ można zdefiniować dowolną operację jednoargumentową, to możemy twierdzić iż:

Tw.1
Algebry $\mathcal{A}_{n\lhd\rhd}$ są funkcyjnie pełne.

Wystarczy teraz wykazać jedynie, że **G,H** są definiowane przy pomocy $\blacktriangleleft,\blacktriangleright$
Zauważmy, że w algebrach $\mathcal{A}_{n\lhd\rhd}$ są definiowalne operacje temporalne: **G** i **H**. Definicje te wyglądają następująco:

$$\mathbf{G}\varphi \underset{def.}{=} -\blacktriangleright-\varphi \cap -\blacktriangleright\blacktriangleright-\varphi \cap \ldots \cap - \underbrace{\blacktriangleright\ldots\blacktriangleright}_{n-1\, razy} -\varphi$$

$$\mathbf{H}\varphi \underset{def.}{=} -\blacktriangleleft-\varphi \cap -\blacktriangleleft\blacktriangleleft-\varphi \cap \ldots \cap - \underbrace{\blacktriangleleft\ldots\blacktriangleleft}_{n-1\, razy} -\varphi$$

np. dla $n = 3$

---

[5] Ibidem, s.26..

[6] Ibidem, s.26-27.

φ	$-\varphi$	$\blacktriangleright - \varphi$	$\blacktriangleright\blacktriangleright - \varphi$	$- \blacktriangleright - \varphi$	$- \blacktriangleright\blacktriangleright - \varphi$	$-\blacktriangleright-\varphi\cap-\blacktriangleright\blacktriangleright-\varphi$	$\mathbf{G}_{\varphi}$
(1 1 1)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)
(1 1 0)	(0 0 1)	(0 1 0)	(1 0 0)	(1 0 1)	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 0 1)
(1 0 1)	(0 1 0)	(1 0 0)	(0 0 0)	(0 1 1)	(1 1 1)	(0 1 1)	(0 1 1)
(0 1 1)	(1 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)
(0 0 1)	(1 1 0)	(1 0 0)	(0 0 0)	(0 1 1)	(1 1 1)	(0 1 1)	(0 1 1)
(0 1 0)	(1 0 1)	(0 10)	(1 0 0)	(1 0 1)	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 0 1)
(1 0 0)	(0 1 1)	(1 1 0)	(1 0 0)	(0 0 1)	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 0 1)
(0 0 0)	(1 1 1)	(1 1 0)	(1 0 0)	(0 0 1)	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 0 1)

φ	$-\varphi$	$\blacktriangleleft - \varphi$	$\blacktriangleleft\blacktriangleleft - \varphi$	$- \blacktriangleleft - \varphi$	$- \blacktriangleleft\blacktriangleleft - \varphi$	$-\blacktriangleleft-\varphi\cap-\blacktriangleleft\blacktriangleleft-\varphi$	$\mathbf{H}_{\varphi}$
(1 1 1)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)
(1 1 0)	(0 0 1)	(0 0 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 1 1)
(1 0 1)	(0 1 0)	(0 0 1)	(0 0 0)	(1 1 0)	(1 1 1)	(1 1 0)	(1 1 0)
(0 1 1)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 0 1)	(1 0 1)	(1 1 0)	(1 0 0)	(1 0 0)
(0 0 1)	(1 1 0)	(0 1 1)	(0 0 1)	(1 0 0)	(1 1 0)	(1 0 0)	(1 0 0)
(0 1 0)	(1 0 1)	(0 10)	(0 0 1)	(1 0 1)	(1 1 0)	(1 0 0)	(1 0 0)
(1 0 0)	(0 1 1)	(0 0 1)	(0 0 0)	(1 1 0)	(1 1 1)	(1 1 0)	(1 1 0)
(0 0 0)	(1 1 1)	(0 1 1)	(0 0 1)	(1 0 0)	(1 1 0)	(1 0 0)	(1 0 0)

Ponieważ operacje **G,H** są definiowalne w $\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$ a przy ich pomocy oraz operacji Boole'owskich można zdefiniować wszystkie operacje na $\mathcal{A}_{n\ GH}$, zatem także na $\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$ można zdefiniować wszystkie operacje jednoargumentowe. To kończy dowód twierdzenia o funkcyjnej pełności algebr $\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$. Pozostałe algebry $\mathcal{A}_{C\triangleleft\triangleright}$, $\mathcal{A}_{N\triangleleft\triangleright}$, $\mathcal{A}_{C\text{-}GH}$ mają nieskończoną liczbę argumentów. Wobec tego nie możemy udowodnić, że są w niej definiowalne operacje jednoargumentowe **G**, **H**. Wykazanie ze nie są funkcyjnie pełne wymaga odrębnego dowodu.

Oprócz tego, że operacje **G,H** są definiowalne w algebrach $\mathcal{A}_{n\triangleleft\triangleright}$ to zachodzi także zależność odwrotna: operacje $\blacktriangleleft$, $\blacktriangleright$ można zdefiniować w algebrach $\mathcal{A}_{n\ GH}$.

Definicja $\blacktriangleright$ przy pomocy **G**, **H** :

$$\blacktriangleright\varphi \underset{def.}{=} \blacktriangleright_1\varphi \cup \blacktriangleright_2\varphi \cup \ldots\cup \blacktriangleright_{n-1}\varphi$$

$$\blacktriangleright_i\varphi \underset{def.}{=} \bullet_{i+1}\ \varphi \cap o_i \qquad (1 \le i \le n-1)$$

o_i - to stałe definiowane następująco:

$o_1 = \mathbf{H}\,\mathbf{0}_n = \mathbf{H}$ (0,0,0,…,0) = (1,0,0,…,0)

$o_i = \underbrace{\mathbf{H}\ldots\mathbf{H}}_{i\,razy}\,\mathbf{0}_n \quad \cap \quad \underbrace{\mathbf{G}\ldots\mathbf{G}}_{n+1-i\ \ razy}\,\mathbf{0}_n \quad (2 \le i \le n-1)$

$o_n = \mathbf{G}\,\mathbf{0}_n = \mathbf{H}(00\ldots001)$

(o_i - charakteryzuje się tym, że na *i*-tej pozycji znajduje się 1 a na pozostałych 0)
np.:
$o_1 = (1, 0, 0, 0\ldots0)$
$o_2 = (0, 1, 0, 0\ldots0)$
$o_3 = (0, 0, 1, 0\ldots0)$

$o_n = (0, 0, 0, 0\ldots1)$

$\bullet_i\ \varphi \underset{def.}{=} \otimes\left[(\varphi \cap o_i) \div o_i\right] \qquad (2 \le i \le n)$

• - jest to operacja, którą definiuje się następująco

$\otimes\varphi \underset{def.}{=} \varphi \cap \mathbf{G}\,\varphi \cap \mathbf{H}\,\varphi = \begin{cases} \mathbf{1}_n & dla \quad \varphi = \mathbf{1}_n \\ \mathbf{0}_n & dla \quad \varphi \ne \mathbf{1}_n \end{cases}$

$\mathbf{1}_n \underset{def.}{=} \varphi \cup -\varphi = (1, 1, \ldots 1)$

$\mathbf{0}_n \underset{def.}{=} \varphi \cap -\varphi = (0, 0, 0 \ldots 0)$

Np. dla *n*=3

φ	$\varphi \cap o_1$	$\varphi \cap o_2$	$\varphi \cap o_3$	$\bullet_2\ \varphi$	$\bullet_3\ \varphi$	$\blacktriangleright_1\varphi$	$\blacktriangleright_2\varphi$	$\blacktriangleright\varphi$
(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)
(0 0 1)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 1)	(0 0 0)	(1 1 1)	(0 0 0)	(0 10)	(0 10)
(0 1 0)	(0 0 0)	(0 1 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(0 0 0)	(1 0 0)	(0 0 0)	(1 0 0)
(1 0 0)	(1 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)	(0 0 0)
(1 1 0)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 0 0)	(1 1 1)	(0 0 0)	(1 0 0)	(0 0 0)	(1 0 0)
(1 0 1)	(1 0 0)	(0 0 0)	(0 0 1)	(0 0 0)	(1 1 1)	(0 0 0)	(0 1 0)	(0 1 0)
(0 1 1)	(0 0 0)	(0 1 0)	(0 0 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 0 0)	(0 10)	(1 1 0)
(1 1 1)	(1 0 0)	(0 1 0)	(0 0 1)	(1 1 1)	(1 1 1)	(1 0 0)	(0 10)	(1 1 0)

Zakończenie

W artykule tym chciałam skoncentrować się jedynie na semantycznej charakterystyce LZD w strukturach czasu liniowego i dyskretnego . Swoją uwagę skupiłam głównie na porównaniu algebr zmian do odpowiednich im algebr temporalnych, wykazując w ten sposób, że algebry zmian czasu skończonego są funkcyjnie pełne. Przedstawiłam też, że przy pomocy funktorów zmiany można zdefiniować funktory temporalne. Ze względu na temat wystąpienia opuściłam syntaktyczną charakterystykę LZD.

Bibliografia

1 .J. Wajszczyk, *Logika a czas i zmiana*, Wydawnictwo WSP, Olsztyn 1995
2. J.Wajszczyk, *Logiki w logice*, Wydawnictwo UWM, Olsztyn 2001
3. G.H.von Wright, *And Next*, "Acta Philophica Fennica" 1965, fasc.18
4. S. Haack, *Deviant Logic*, Cambrige University Press 1974